

台灣地區生育率推估方法的研究

A Comparison of Fertility Projection Methods: A Case Study in Taiwan Area

黃意萍* 余清祥**
I-Ping Huang** Jack C. Yue***

摘 要

「生育率的降低」是影響台灣地區近年來人口老化的顯著因素之一，因其變化幅度通常高於死亡率，對人口結構的影響較大。本文研究台灣地區 15 至 49 歲五歲一組的婦女生育率，引進 Gamma 函數、Gompertz 函數、Lee-Carter 法三種模型及單一年齡組個別估計法，以西元 1951 年至 1995 年的資料為基礎，西元 1996 年至 2000 年資料為檢測樣本的驗證資料，比較上述四種方法，尋求較適合台灣地區生育率的模型。研究發現如要預測總生育率，建議使用單一年齡組個別估計法或經由 WLS 修正的 Lee-Carter 模型；預測年齡別生育率，建議使用單一年齡組個別估計法或 Gompertz 模型。

關鍵字：生育率推估、Gamma 函數、Gompertz 函數、Lee-Carter 法、交叉驗證

* 政治大學統計研究所碩士
Graduated with a Master's Degree in Department of Statistics, National Chengchi University

** 政治大學統計系副教授
Associate Professor, Department of Statistics, National Chengchi University

Abstract

In recent years because of the aging population, there have been great changes in Taiwan's fertility and mortality rates. As the proportion of elderly people aged 65 and over increase dramatically from 2.6% in 1965 to 8.8% in 2001, the decrease of fertility rate is most significant. In 1961, the total fertility rate was 5.58. By 1981, it was dropped to 1.67 and in 2001, further to 1.4, a reduction of almost 70% within 20 years.

This paper examines the fertility pattern in the Taiwan area. In particular, it aims to review the various fertility models and seek for the model that is most appropriate for describing the situation in Taiwan. The models considered are Gamma function, Gompertz function, Lee-Carter method and individual group estimation. Data from 1951 to 1995 is used as a pilot for verifying the model which has the best fit for data gathered from 1996 to 2000. It is found that individual group estimation and the Lee-Carter method have least errors for predicting total fertility rates; while individual group estimation and Gompertz function are more effective for predicting age-specific fertility rates.

Key Words: fertility projection, Gamma function, Gompertz function, Lee-Carter method, cross validation.

壹、前言

生育率 (fertility) 為測量婦女生男育女的高低。近年來，台灣地區由於社會變遷與經濟成長等因素，使得台灣地區的生育率呈現長時間下降的趨勢。其中影響生育率較大的因素有：新生代的婚姻與生育價值觀改變 (Tsai and Yi, 1987)、養育子女的成本上漲 (Becker and Lewis, 1974)、避孕工具使用的普及化 (孫得雄, 1989)；另外，隨著婦女教育水準提高，就業機會增加，女權主義抬頭，導致愈來愈多的女性，寧願選擇少生或不生孩子 (Pritchett, 1994)。上述種種因素使得平均每對夫婦生育子女數減少，造成生育率呈現持續下降的趨勢。

根據行政院經濟建設委員會人力規劃處的資料 (圖 1)，西元 1960 年代至 1980 年代之間，台灣總生育率下降速度非常快，之後至今的二十年間都維持在 1.5 到 1.7 之間，遠低於 2.1 人的替代生育水準。此外，根據行政院內政部歷年所編印之「中華民國台灣地區人口統計」資料 (參閱圖 2)，西元 1951 年至 2000 年期間台灣地區年齡別婦女生育率在各年齡組中均大幅降低，更可看出台灣地區婦女生育率逐年下滑。

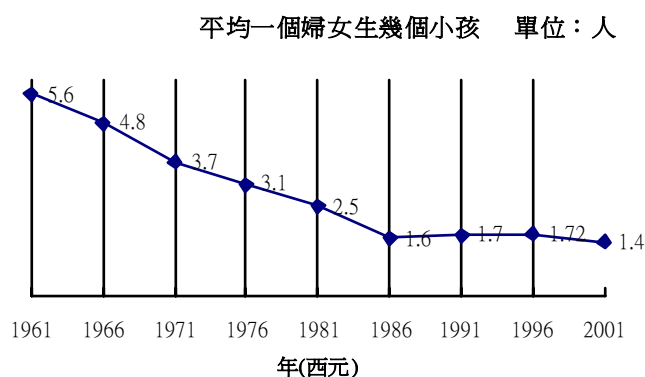


圖 1 台灣地區婦女總生育率

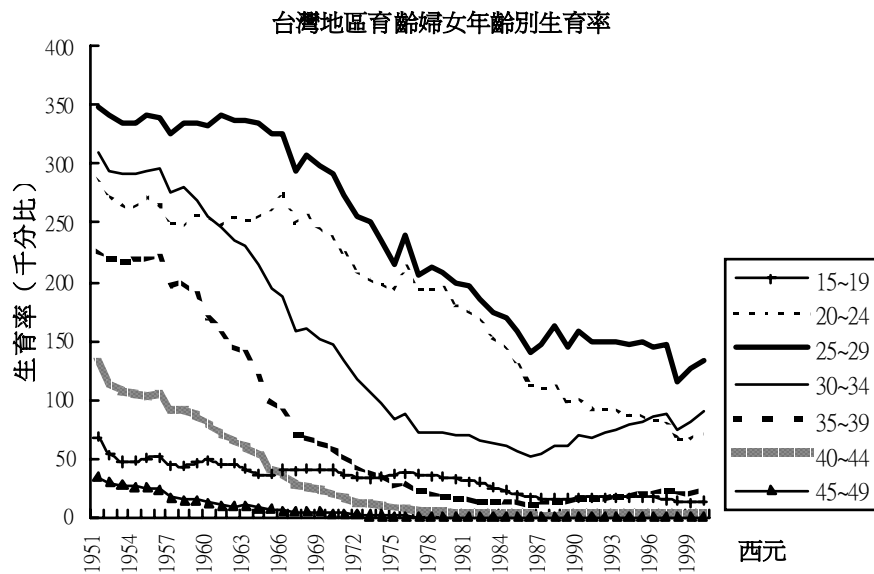


圖 2 台灣地區育齡婦女年齡別生育率：1951-2000

由於生育率下降會減少新一代的人口數量，將影響該世代之就業、婚姻與生育行為，也加速人口老化的現象。其中台灣地區老年人口（65 歲以上）佔總人口數的比例正逐年增加，比例由西元 1965 年 2.6% 上昇至西元 2001 年 8.8%，增加率高達 6.2 個百分比¹。因人口老化將改變整體社會醫療需求、影響國民年金等社會福利措施，家庭形態的變遷與老年生活扶養問題也會漸漸衝擊社會，故政府在制定國家未來政治、經濟、社會、文化發展政策時，生育率的趨勢便是重要的參考因素。

本文以台灣地區的生育率為研究課題，以統計分析的觀點探討與預測未來趨勢，使用 Gamma 函數、Gompertz 函數、Lee-Carter 法、單一年齡組個別估計

¹ 資料來源：內政部統計處第二科。

法，配適台灣地區的生育率模式，尋找較能反映台灣地區婦女生育特性（包括總生育率及年齡別生育率）的方法，提供各界預測未來台灣婦女生育率的參考。在實證分析方面所使用的統計軟體有 S-Plus 與 Minitab。本文以下安排為：第二節介紹模式的理論架構；第三節以台灣地區生育率來配適本文所介紹的四種方法並用交叉驗證（cross validation）比較之；第四節為討論與結論，討論本文介紹四種方法的特性，提出對台灣生育率模型研究的建議。

貳、模型介紹

配適生育率的模型及方法中，較知名的有 Hoem (1981)採用 Gamma 函數配適年齡別生育率，Martin (1967)與 Wunsch (1966)以 Gompertz 模型估計生育率，Lee (2000)指出可利用 Lee-Carter 模型探討生育率的變化...等等。其中總生育率（total fertility rate，簡稱 TFR）代表一個婦女一生中平均所生的嬰兒數或生育率，其定義為（Brown, 1991）：

$$TFR(z) = \sum_{x=\zeta}^{\eta} {}_n f_x(z) = \sum_{x=\zeta}^{\eta} \frac{{}_n B_x(z)}{{}_n F_x(z)},$$

以 ${}_n f_x(z)$ 表示 z 年 x 歲至 x+n 歲婦女的生育率， ${}_n B_x(z)$ 是 z 年 x 歲至 x+n 歲婦女所生的嬰兒數， ${}_n F_x(z)$ 是 z 年年中 x 歲至 x+n 歲婦女數， ζ 、 η 分別代表婦女生育年齡的下限及上限，在台灣地區通常定為 15 歲及 49 歲，n 通常等於 5。

本文就台灣地區生育率的研究，分別以總生育率之量與年齡別生育率之年齡分佈，探討適合預估台灣地區生育率的模型，再利用迴歸分析及時間序列等方法求得模型的參數。將依 Gamma 模型、Gompertz 模型、Lee-Carter 模型及單一年齡組個別估計法四種模型來探討生育率，以下依序介紹這四種方法：

一、Gamma 模型

1981年Hoem採用Gamma函數配適年齡別生育率；Bell(1988)亦使用Gamma函數，利用多變量時間序列模型估計參數；王德睦(1993)也引用Gamma函數，以邏輯(logit)函數估計參數，對其參數套用時間序列的方法，得出未來人口高、中、低推估；呂文慧(1996)對平均數與變異數做轉換，利用時間序列方法分析，求出未來育齡婦女年齡別生育率的分佈。本文使用Gamma模式，用迴歸分析方法估計參數，期望能用較簡單的方法求取不錯的配適效果。

首先，本文假設育齡婦女年齡別生育率分配的Gamma函數為：

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \chi^{\alpha-1} e^{-\beta\chi} = K\chi^{\alpha-1} e^{-\beta\chi} \quad (1)$$

χ 表示年齡； $f(x)$ 表示年齡別生育率； K 取代 $\beta^\alpha/\Gamma(\alpha)$ ，為模型的參數； $\alpha-1$ 表示函數轉折高度係數； β 為函數轉折收斂係數，代表函數尾端的收斂速度。接著將上式作對數轉換，即對等號兩邊取對數，加上誤差項，設定為線性方程式：

$$\ln f(x_t) = \ln K_t + (\alpha_t - 1) \ln \chi_t - \beta_t \chi_t + \varepsilon_t \quad (2)$$

利用最小平方法(ordinary least squares, 簡稱OLS)求得參數 $\ln K_t$ 、 α_t-1 與 β_t 。引用(2)式的線性模型求解較(1)式佳，因為經對數轉換後，可減輕每年的生育率分佈中偏離值對於估計參數的影響，以取得較佳的估計值。

再對參數 $\ln K_t$ 、 α_t-1 、 β_t 配適迴歸分析，以時間 t 當自變數， $\ln K_t$ 、 α_t-1 、 β_t 當反應變數，檢查是否符合迴歸分析基本假設²，找出 $\ln K_t$ 、 α_t-1 、 β_t 的估計值，代回公式(2)以指數還原，即可求得當年度的年齡別生育率，進而求出 $\ln K_t$ 、 α_t-1 、 β_t 各年度預測值，以預測未來的年齡別生育率，將所得之

² 殘差 ε 間互相獨立且來自於期望值 0、變異數 σ^2 的常態分配，以符號表示即為 $N(0, \sigma^2)$ 的分配。

各年齡別生育率加總後可得出總生育率的推估。

二、Gompertz 模型

Gompertz 函數在人口統計學死亡率的研究中扮演相當重要的角色，而首次用於生育率的研究是外國學者 Martin (1967) 與 Wunsch (1966)，他們評估 Gompertz 模型在生育率研究的可行性；Brass (1974) 對年齡等級的轉換也有詳細的介紹；另外 Booth (1984)、Murphy and Nagnur (1972) 及 Neupert (1992) 也曾用 Gompertz 模式配適生育率，台灣尚無利用 Gompertz 模式配適生育率。Gompertz 模型如下：

$$F(x) = FA^{B^x}$$

x 表示年齡； $F(x)$ 表示累計生育率；而 F 代表總生育率； A 、 B 則是生育率的趨勢（ A 是達到總生育率的比例、 B 與變異數有關，兩者範圍皆在 0 與 1 之間）。

假設對 $F(x)$ 取兩次對數可以是 x 的線性函數，則：

$$Y(x) = -\ln\left\{-\ln\frac{F(x)}{F}\right\} = -\ln(-\ln A) + (-\ln B)x = a + bx \quad (3)$$

在公式(3)中， $a = -\ln(-\ln A)$ ， $b = -\ln B$ ，本文將視 $Y(x)$ 為反應變數， x 為自變數，利用迴歸分析的方法，配適迴歸直線，得到參數 a 、 b 。另外，總生育率 F 與時間 t 有關，採用迴歸與時間序列分析，配適 TFR 的模型以預測未來總生育率，再由 TFR 與參數 a 、 b ，求得累計生育率，藉此推算出各年齡別生育率。

三、Lee-Carter 模型

Lee and Carter (1992)、Wilmoth (1996) 分別應用 Lee-Carter 模型配適在美國、日本的人口資料用以預測死亡率。因為近年來台灣地區死亡率和生育率的趨勢皆呈遞減的情況，因此本文也套用 Lee-Carter 模型來分析台灣地區的生育率。其模型為：

$$\ln(f_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (4)$$

$f_{x,t}$ 表示 t 年時， x 歲育齡婦女的生育率； a_x 、 b_x 、 k_t 為模型參數； $\varepsilon_{x,t}$ 為隨機誤差項。

參數 k_t 可以視為來自一個隨機過程 (stochastic process)，藉由時間序列的模型以建立 k_t ，進一步估計未來的 k_t 。 k_t 模型為：

$$k_t = k_{t-1} - Z + \varepsilon_t \quad (5)$$

Z 表示一平均遞減的常數， ε_t 表示隨機誤差項。在 Lee-Carter 的研究中，模型使用最小誤差平方和來配適，也就是求 $\sum_{x,t} (\ln(f_{x,t}) - a_x - b_x k_t)^2$ 的最小值。

三個未知的參數 a_x 、 b_x 與 k_t 必須用 SVD (singular value decomposition, 簡稱 SVD) 方法解之，可用統計軟體(例如：S-Plus)即可求解。若資料不齊全，也就是某些年度的生育率沒有紀錄使得 $\ln(f_{x,t})$ 為非完整矩陣時，則無法用 SVD 方法求解，此時可由 Lee-Carter 建議的 SVD 近似法 (approximation) 來求解未知參數。本文利用上述兩種不同的方法估計 Lee-Carter 模型的三個參數：

1. SVD 的參數配適步驟說明：

- (1) a_x 等於 $\ln(f_{x,t})$ 在全部時間內之平均。
- (2) b_x 與 k_t 可以從矩陣 $[\ln(f_{x,t}) - a_x]$ 中分解得到，其中 k_t 為矩陣 $[\ln(f_{x,t}) - a_x]$ 分解得到的奇異解 (singular value)。

2. SVD 近似法的參數配適步驟說明：

- (1) 兩個限制式：令 k_t 總和為 0， b_x 總和為 1，即 $\sum k_t = 0$ 、 $\sum b_x = 1$ 。
- (2) a_x 為 $\ln(f_{x,t})$ 在全部時間內的平均。
- (3) k_t 非常接近全部年齡組的 $[\ln(f_{x,t}) - a_x]$ 的總和。
- (4) b_x 可利用迴歸分析法求解， $[\ln(f_{x,t}) - a_x]$ 視為反應變數、 k_t 為自變數，分別

對每一年齡組配適一條沒有截距項的迴歸直線， b_x 即配適後 k_t 的係數。

利用 **SVD** 或是 **SVD 近似法** 求出參數 a_x 、 b_x 與 k_t 後，由公式(5)估計出預測年度的 k_t ，代回公式(4)，即得到預測生育率，再加總各年齡別的生育率，即可得知總生育率。

1993 年 Wilmoth 對 Lee-Carter 的模型提出修正，指出在估計參數時若以 weighted least square (簡稱 WLS) 修正，可以降低死亡率的變異數，提出修正的模型如下：

$$\text{Min } \sum_{x,t} W_{x,t} (\ln(f_{x,t}) - a_x - b_x k_t)^2$$

其中參數 W_{xt} 為婦女年中人口數，利用偏導數的概念求出正規方程式(normal equation)，即可得到參數 a_x 、 b_x 與 k_t 的估計公式，估計公式如下：

$$a_x = \frac{\sum_t W_{x,t} (\ln(f_{x,t}) - b_x k_t)}{\sum_t W_{x,t}}$$

$$b_x = \frac{\sum_t W_{x,t} k_t (\ln(f_{x,t}) - a_x)}{\sum_t W_{x,t} k_t^2}$$

$$k_t = \frac{\sum_x W_{x,t} b_x (\ln(f_{x,t}) - a_x)}{\sum_x W_{x,t} b_x^2}$$

因為此修正預計可降低死亡率的變異，因此本文亦嘗試將 WLS 套用在生育率上。

四、單一年齡組個別估計法

上述三個模型，皆假設各年齡間的生育率滿足某種大小順序或比例的關係，其中 Gamma 與 Gompertz 為參數模型、Lee-Carter 可視為半參數 (semi-parametric) 模型，但實際上這種大小順序或比例的關係不一定成立。例如在圖 3 中，總生育率與各年齡組育齡婦女的生育率均明顯下降，其中 32 歲婦女的生育率在 1957 年及 1997 年高於 22 歲婦女的生育率，但 1977 年 32 歲卻低於 22 歲婦女生育率；另外，1997 年與 1977 年圖形的交叉也可說明各年齡生育率關係的改變，雖然各年齡組之間維持一個穩定的相對位置，但是各年齡組間的關係並不固定，故本文提出以單一年齡組個別配適一個模型。本文以五歲年齡組為分組單位，因此 15 至 49 歲年齡組共可分成 7 組，分析方法也採用迴歸和時間序列分析。

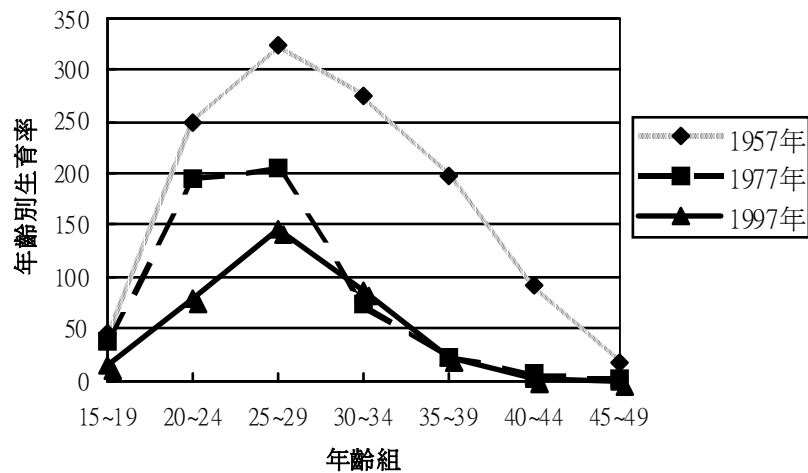


圖 3 台灣地區育齡婦女生育率分佈圖

參、資料分析

本文採用行政院內政部歷年編印之「中華民國台閩地區人口統計」，對象為 15 至 49 歲育齡婦女，以五歲為一組的人口統計資料，並以各年齡組中間年齡為代表（例如將 17 歲婦女的生育率視為 15-19 歲婦女的生育率），將西元 1951 年至 1995 年的資料，代入 Gamma 函數、Gompertz 函數、Lee-Carter 法以及單一年齡組個別估計法來配適模型，再以西元 1996 年至 2000 年的資料為驗證對象，比較上述四種模型的預估準確性。

一、實證分析

1. Gamma 模型

本文採用 45 個年份的資料（西元 1951 年至 1995 年），在 Gamma 模式中套用適當轉換（取自然對數）後，配適出 45 條迴歸線。本文後面的附錄表 1 為配適 1951 年到 1995 年 Gamma 函數的參數估計值，由此表的數值可知個別迴歸的 R^2 都在 97% 以上，1970 年後的 R^2 甚至大於 99%³，相關性非常高，表示 Gamma 函數的模型配適度很高，即台灣地區的各年齡別生育率與 Gamma 函數相當接近。由此不難看出，正因為常用的迴歸分析是使用 Gamma 模型時僅需採取的模式配適步驟，加上配適的 R^2 也非常大，因此過去 Gamma 模型經常受到研究者的青睞。

但是針對 Gamma 模型中參數 $\ln K_t$ 、 $\alpha_t - 1$ 、 β_t 的走勢，個別以迴歸方法來分析，發現得到之殘差皆不符合迴歸假設，不僅在殘差圖（residual plot）看到殘差具有很高的相關性，並且藉由 Durbin-Watson 檢定發現誤差具有一階自我相關，因此再配合時間序列分析，觀察殘差的 ACF 與 PACF，對殘差配適 AR(1)，如下：

³ 本文的 R^2 比呂文慧（1996）得出的結果高。

$$\begin{aligned} \ln(\ln K_t) &= \beta_{0,K} + \beta_{1,K} t + \varepsilon_{t,K} & \varepsilon_{t,K} &= \phi_K \varepsilon_{t-1,K} + a_{t,K} \\ \alpha - 1 &= \beta_{0,\alpha} + \beta_{1,\alpha} t + \varepsilon_{t,\alpha} & \varepsilon_{t,\alpha} &= \phi_\alpha \varepsilon_{t-1,\alpha} + a_{t,\alpha} \\ \beta &= \beta_{0,\beta} + \beta_{1,\beta} t + \varepsilon_{t,\beta} & \varepsilon_{t,\beta} &= \phi_\beta \varepsilon_{t-1,\beta} + a_{t,\beta} \end{aligned}$$

$a_{t,K}$ 、 $a_{t,\alpha}$ 、 $a_{t,\beta}$ 為白干擾 (white noise)，符合互相獨立且服從 $N(0, \sigma_i^2)$ 分配的假設，其中 $i = K, \alpha, \beta$ 。 $\ln K_t$ 取對數是因為配適 $\ln(\ln K_t)$ 得到的 R^2 較配適 $\ln K_t$ 高。藉由計算得到 $\ln K_t$ 、 $\alpha_t - 1$ 、 β_t 的估計值與預測值，再求出當年度預估的年齡別生育率與總生育率。

2. Gompertz 模型

Gompertz 模型是利用累積分配函數 (cumulative distribution function, 簡稱 CDF) 的形式展現，利用累計生育率除以總生育率經轉換得到線性模型，也可藉由簡單線性迴歸，求得參數 a 、 b 。附錄表 2 為配適 1951 年到 1995 年 Gompertz 函數的參數估計值，每年所得到線性方程式的 R^2 皆高達 95% 以上， R^2 的平均值也達 97.6%，只稍低 Gamma 模型平均值 1.2% 左右，表示以 Gompertz 模型配適年齡別生育率的解釋能力也不錯。

Gompertz 模型中的總生育率 F 是模型參數之一，不像 Gamma 模型中需由參數輾轉運算求得，可預期總生育率的預測在 Gompertz 模型中應較準確。另外，針對參數 a 、 b 隨時間呈現變化的趨勢 (見附錄表 2)，將其模型形態表為：

$$\begin{aligned} \ln(\text{TFR}) &= \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t & \varepsilon_t &= \phi_1 \varepsilon_{t-1} + a_{t,T} \\ a &= \beta_{0,a} + \beta_{1,a} t + \varepsilon_{t,a} & \varepsilon_{t,a} &= \phi_a \varepsilon_{t-1,a} + a_{t,\alpha} \\ b &= \beta_{0,b} + \beta_{1,b} t + \varepsilon_{t,b} & \varepsilon_{t,b} &= \phi_b \varepsilon_{t-1,b} + a_{t,\beta} \end{aligned}$$

其中 $a_{t,T}$ 、 $a_{t,\alpha}$ 、 $a_{t,\beta}$ 為白干擾，之間互相獨立且同為常態分配平均數為 0、固定變異數的假設。藉由上述三個公式推算出累計生育率，再代回求得各年齡別生育率。

3. Lee-Carter 模型

Lee-Carter 模型中的參數估計法 SVD 必須限制在完整資料下使用，而 SVD 近似法沒有這類的限制。Lee and Carter (1992) 研究發現這兩種估計參數的方法，其得到的結果非常相似，本文想嘗試在生育率中是否也有如此情形，因此本文先以 SVD 與 SVD 近似法求出參數 a_x 、 b_x 與 k_t ，接著另以 Wilmoth (1993) 建議的 WLS 修正方式再一次估計參數，因此共有 4 種不同的估計方法，其配適西元 1951 年到 1995 年的年齡別生育率所得出的參數估計值可參考附錄表 3。

在 SVD 與 SVD 近似法的估計方法中，參數 k_t 皆是時間的函數，但是用來預測 k_t 的模型定義卻不相同，即 k_t 的時間序列模型 $k_t = k_{t-1} - Z + \varepsilon_t$ 中， Z 有不同的求解方法：SVD 法的 Z 是最後的 k_t (西元 1995 年) 減第一個 k_t (西元 1951 年) 再除以兩者之間相差的年數；SVD 近似法先假設 k_t 為時間 t 的線性函數，配適 k_t 與時間 t 的迴歸線 $k_t = \alpha + \beta t$ ，經過 Kolmogorov-Smirnov 適合度檢定得知 k_t 服從 $k_t = \alpha + \beta t$ 的迴歸線 (P-value=0.107>0.05)，表示 SVD 近似法的假設無誤後，原先欲求之 Z 即是上述的迴歸係數 β 。

由公式(5)得知預測年度的 k_t ，代回公式(4)即可求出預測的生育率，繼而計算出總生育率。本文將利用 Lee-Carter 模型求解得到的參數估計詳列於附錄表 3，我們發現 SVD 與 SVD 近似法所得到的結果差異不大；然而，不論是以 SVD、SVD 近似法或是 Wilmoth 建議的修正法求解參數 a_x 、 b_x 與 k_t ，其計算的年齡別生育率以及總生育率的估計及預測結果，以採用 WLS 修正的誤差較小。

4. 單一年齡組個別估計法

從過去年齡別生育率的資料發現生育率隨著時間呈現遞減型態，而 7 個年齡別生育率在時間序列圖 (time-series plot) 中皆顯示資料不平穩⁴ (nonsta-

⁴ 時間序列資料在平均數、變異數上並沒有維持在一個固定的數。

tionary)，因此本文針對各年齡別生育率分別取對數，利用轉換數列以達到平穩進而配適模型：

$$\ln({}_5f_x) = \beta_{0,x} + \beta_{1,x}t + \varepsilon_{x,t} \quad x = 15, 20, \dots, 45 \text{ 歲}$$

t 表示時間 (1951, 1952, ..., 1995)， ${}_5f_x$ 表示五歲一組的年齡別生育率，對各年齡別配適迴歸模型之後，再分別對其殘差 ($\varepsilon_{x,t}$) 找出各自符合的 ARIMA 模式。結果如附錄表 4 所示，7 個年齡組各有其方程式可以推估年齡別生育率，並且預測西元 1996 年至 2000 年的生育率。由附錄表 4 可知每個年齡組迴歸模型的配適結果都不錯，模型的 R^2 皆在 85% 以上。

二、模型比較

綜合以上四種方法的推估結果，本文以平均絕對誤差 (MAPE)、根均平方誤差 (RMSPE) 作為評估預測能力的準則：

1. MAPE (mean absolute percentage error)：

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\varepsilon_i|}{Y_i} \times 100\%$$

其中 Y_i 是第 i 個觀察值，也就是第 i 個得到的生育率； $\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$ 、 \hat{Y}_i 是 Y_i 的預測值。Lewis (1982) 依 MAPE 大小將模式預測能力分為以下四個等級：

MAPE	<10%	10%~20%	20%~50%	>50%
預測能力	高精確度	良好	合理	不正確

預測誤差愈小，表示模式愈佳。本文將以此來判斷上述的模式。

2. RMSPE (root mean square percentage error) :

$$RMSPE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon_i}{Y_i}\right)^2} \times 100\%$$

其中 Y_i 與 ε_i 同 MAPE 中的定義。RMSPE 因為有平方項的關係容易受離群值 (outlier) 影響，但是仍可仿照上述之等級判斷之。

以下對本節之前介紹的實證分析模式，將 1996 年到 2000 年所得到之生育率預測值與實際值計算 MAPE 與 RMSPE，依照「總生育率」與「年齡別生育率」分別比較其預測誤差程度。

首先是總生育率預測結果的討論。由圖 4 可知，實際總生育率與預測值都呈現下降的趨勢，但因實際值震盪幅度頗大，沒有一種方法可在每個單一年份都有準確的預測值。整體而言（詳細數字參考附錄表 5），四種方法依據 Lewis 所定義的預測能力等級皆至少良好，其中單一年齡個別估計法與 Lee-Carter 模型比較接近西元 1996 年至 2000 年的總生育率平均線，預測誤差較小，預測比較準確。而就 1996 年至 2000 年的曲線走勢而言，Gamma、Lee-Carter 與單一年齡個別估計三條曲線的下降幅度很類似，而 Gompertz 預測值下降幅度最大。另外，誠如之前的預期，因總生育率在 Gompertz 模型中可直接估計，所以其預測的誤差較 Gamma 模型低。圖 4 中也可看出中國傳統生兒育女觀念的影響：在本文預測的 5 個年度中，西元 1998 年總生育率驟降是因為該年是農曆的虎年（孤鸞年）；西元 2000 年為龍年，使得總生育率上升。

其次是年齡別生育率的預測。由圖 5（詳細數字參照附錄表 6）可知，單一年齡組個別估計法和 Gompertz 模型的預測平均較為準確：個別法的平均預測誤差較低（僅在 45-49 歲這一組有較高的誤差），Gompertz 則較為穩定。單一年齡組個別估計法在 45 至 49 歲有較高的預測誤差，可能是因為此高年齡組生育率數值較小，易受離群值的影響，使得相對震盪幅度變大。而在本文考慮的各模

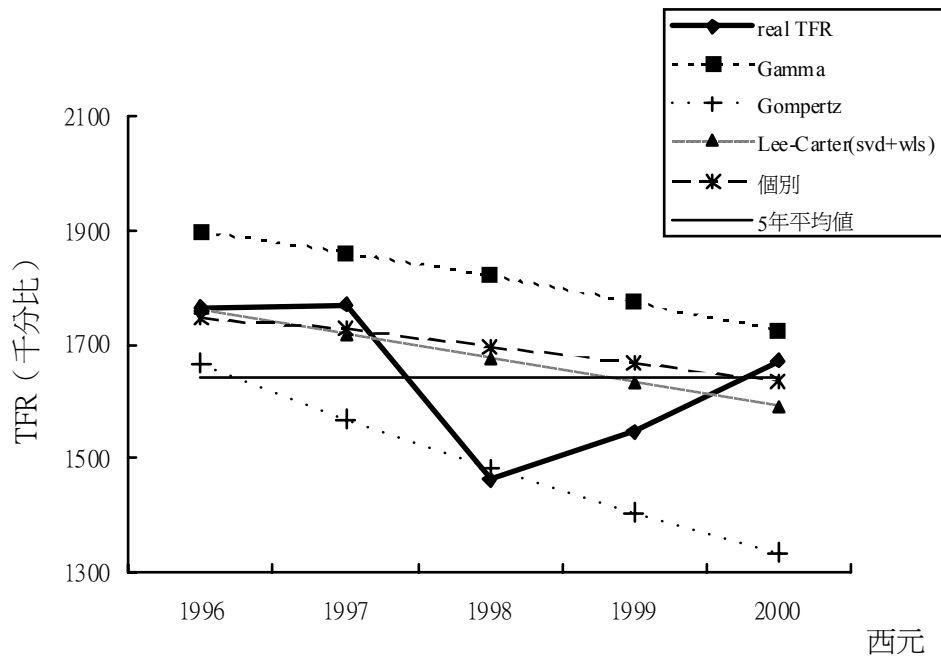


圖 4 1996-2000 年各方法的預測 TFR 之比較

型中，Gamma、Gompertz、Lee-Carter 模型共同特性是假設各年齡組的生育率間具有某種關係（或可稱為關係模型，relational models），類似參數模型的假設；若以適合台灣的（半）參數模型為考量，在誤差大小的標準下，Gompertz 是上述三種模型中較佳的選擇。另外，隨著預測時間的加長，各種方法的預測誤差有逐年上昇的趨勢（參考附錄表 7）。

肆、討論與結論

台灣地區的生育率自 1951 年來，呈現下降的趨勢。本文探討四種方法：

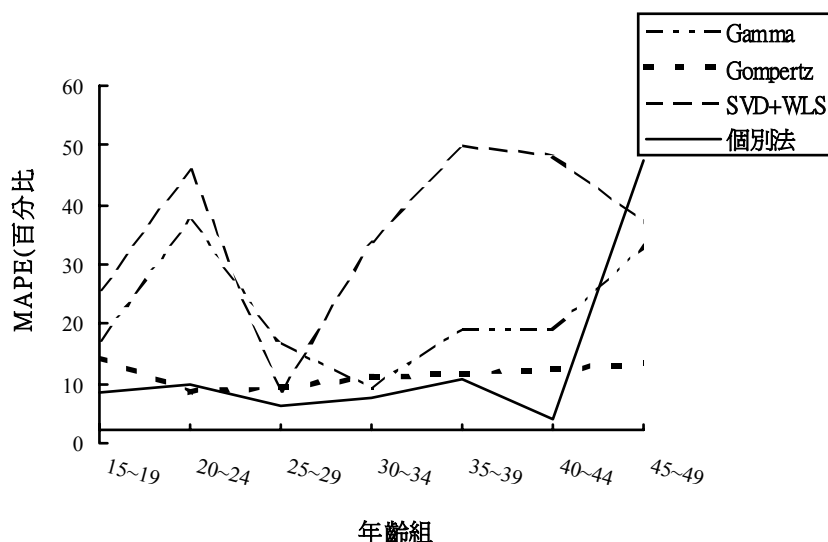


圖 5 1996-2000 年不同年齡組各方法的 MAPE

Gamma 函數、Gompertz 函數、Lee-Carter 法及單一年齡組個別估計法探討總生育率以及生育年齡分布的變化，藉著對生育率的配適與預測，找出適合推估台灣地區生育率趨勢的模型。本文經由西元 1951 至 1995 年的配適、西元 1996 至 2000 年的預測驗證，發現如要預測總生育率，建議使用單一年齡組個別估計法或經由 WLS 修正的 Lee-Carter 模型。預測年齡別生育率，建議使用單一年齡組個別估計法或 Gompertz 模型。整體而言，四種方法中以單一年齡組個別估計法在預測台灣地區生育率有最小的誤差。

由於 Gamma、Gompertz 模型是屬於參數模型，其優點在於估計參數即可取得模型中所有的特性，缺點為缺乏彈性，若模型假設與實際狀況差異過大，勢必影響該模式的實用性。Gamma 模型是最常用來推估生育率的方法，因其配適的 R^2 值很高，然而光看 R^2 是不夠的，必須再考慮模型假設（例如：殘差互相獨

立且為常態分配)與其適合度(goodness-of-fit)。在我們對西元 1951 至 1995 年生育率的模型配適中,發現 Gompertz 的配適誤差(MAPE 及 RMSPE)均小於 Gamma 的誤差,之後的預測結果也與配適結果相同,表示 Gompertz 較 Gamma 模型適合描述台灣的生育率趨勢;再加上 Gamma 模式無法直接獲得總生育率的估計值,與總生育率為模型參數的 Gompertz 模型不同,我們不推薦 Gamma 模型用於台灣生育率模型。

Lee-Carter 模型在此屬於首次嘗試,研究發現 Lee-Carter 模型在預測總生育率時效果很好,但在年齡別生育率卻不盡理想,與 Lee (2000) 宣稱可用 Lee-Carter 模型預測生育率的猜測頗有出入。推測 Lee-Carter 與 Gamma、Gompertz 模型不適用於台灣生育率的原因,可能肇因於台灣地區得生育率變化很大,例如在圖 3 中,可看出 25 至 29 歲這組的生育率在各年度都最高,但其他各組的大小順序隨時間改變,各年齡的關係不固定。因為以上三種模型會受到參數及半參數模型的影響,因此只考慮單一年齡組的個別估計法反而有較佳的結果,然而這方法卻犧牲各組之間的相關性,未來仍有改善的空間。

多變量分析中的主成份分析法是可能的改善方法之一。分析結果發現台灣地區 45 年、每年 7 組年齡組的資料,只需要 2 個主成份即有 96% 的解釋能力,主成份分析中第一主成份的分數(scores)非常接近線性函數,與 Lee-Carter 模型中 k_t 類似,而第二主成份的分數則是有時間序列不平穩(non-stationary)的性質。利用兩個主成份的負荷(loading)與主成分分數計算年齡別生育率與總生育率,發現主成份分析在總生育率的預測不太穩定,其預測的 MAPE 較大(附錄表 5);而年齡別生育率部份較接近單一年齡組個別估計法,尤其在 45 至 49 歲組有明顯改善,整體而言也比 Lee-Carter 模型佳(圖 6)。因為主成分分析在高年齡組有較小的預測誤差,未來可仿造比值法(Yue *et al.*, 2001)調整個別估計法中的高年齡生育率。

除了上述的發現外,以下根據本文的研究心得,提出台灣地區生育率模式

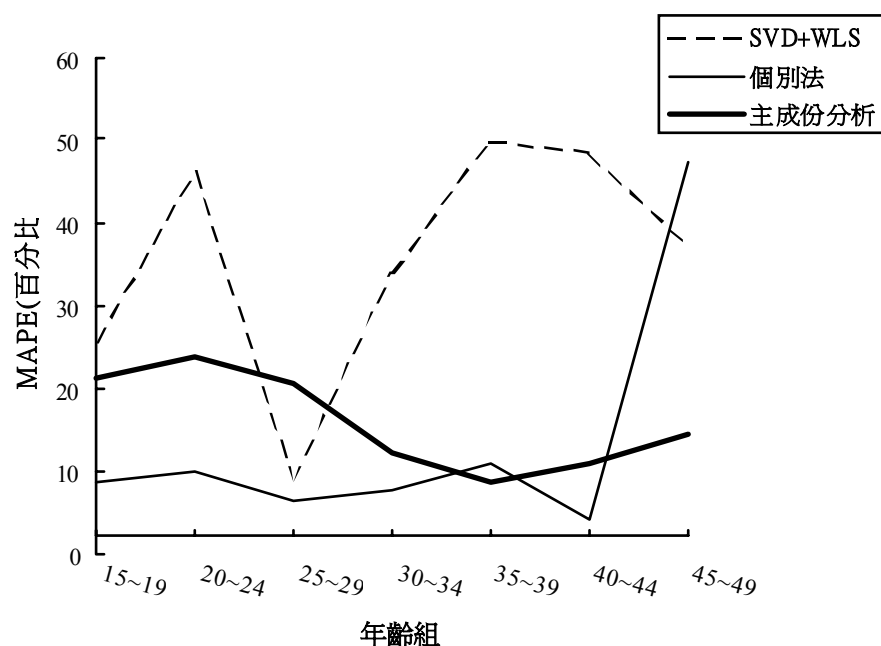


圖 6 1996-2000 年不同年齡組的 MAPE (主成份法)

配適的幾點建議。先就使用線性迴歸來預測而言，由於總生育率與各年齡別生育率均呈現線性下降，但實際上生育率不會無限制的下降（而產生負值的不合理現象），因此可給定最小下限（lowest bound），再以類似羅吉氏曲線（logistic curve）的方法使預測值收斂到最小下限。另外，通常預測值也會以區間的方式呈現，本文討論的預測值也可採用類似信賴區間（confidence interval）的上、下限格式，透過拔靴法（bootstrap）的電腦模擬產生預測區間。

因本文的主要著眼點是以交叉驗證來比較常用生育率模型的預測表現，並未考慮其他與生育率相關的因素，我們計畫在未來的研究中引入與生育率有關的變數，以提高生育率模型的預測能力。可能考慮的變數計有母親生育胎次別

與各年齡女性有偶率。在生育胎次別的分佈方面，可藉由第一胎、第二胎、…等等各胎次比例資訊，與各年齡別生育率配合，計算出婦女生產年齡及其胎次的聯合分配。另外，台灣的嬰兒絕大多數為婚生子，因此婦女的有偶率與生育率有非常大的關係，近年來台灣地區婦女有偶率逐年下降，與生育率的下降有相同的趨勢。除了考慮與生育率相關的因素，我們也考慮引入地區、文化等特性，例如在上一節曾提到虎、龍年效應對中國人結婚生育行為影響甚大，西元 1976 年的龍年效應非常明顯，圖 2 中在 20 至 34 歲各年齡組間的育齡婦女生育率都有明顯上升的傾向；且在西元 1998 年由於虎年孤鸞年的緣故，生育率也因此下降很多。因此在預測時也應考慮這一類的民俗因素，以干擾（intervention）變數的形式置入模型。

此外，現行的總生育率定義為綜合不同世代（generation 或 cohort）的婦女，建議也可考慮同一世代的總生育率，比如今年 50 歲的婦女從開始生育到現在，共生了幾個孩子，例如：

$$TFR^*(x, t) = \sum_{z=x-x}^{t-x} \frac{B_{x+z}(t+z)}{F_{x+z}(t+z)}$$

x 表示年齡，以此來估計總生育率，更可看出生育率隨時間的變化。

生育率的未來變化，對於台灣人口、家庭、勞動力、政策…等結構將會產生衝擊，如何掌握精確的人口變遷趨勢是規劃相關措施時的重要工作，故政府在制定國家未來政治、經濟、社會、文化發展政策時，生育率的變化便是重要的參考因素。因此本文研究比較能代表台灣地區生育率的模型，以求準確地預估台灣地區生育率的趨勢，使政府可以落實社會福利的實施，例如：醫療資源的支出、國民年金的支出、育兒政策的規劃等等。值得注意的是由於本文的各預測方法均顯示未來的總生育率將持續下降，因此如何使生育率回升到替換水準，將是未來制訂人口政策時必須面對的問題之一。

謝 誌

本文作者感謝林正祥教授、涂肇慶教授、以及兩位匿名評審的寶貴建議。

參 考 文 獻

中文部份

- 內政部（1951~2000）中華民國台灣地區人口統計，內政部編印。
- 王德睦（1993）台灣地區未來人口組成之推計，台北市：行政院國科會科資中心。
- 行政院經建會（1996）中華民國台灣地區民國 84 年至民國 125 年人口推計，行政院經建會。
- 呂文慧（1996）台灣地區高齡化的預估與其對醫療影響之研究，政治大學風險管理所。
- 張正鵬（1999）臺灣地區高齡人口死亡率之預測，政治大學統計所。
- 李美玲（1990）生育步調與生育轉型：台灣地區總生育率之分析，東海大學社會所。
- 孫得雄（1989）人口學與家庭計畫，空中大學用書。

英文部份

- Bell, W. R. (1997) Comparing and assessing time series methods for forecasting age-specific fertility and mortality rates, *Journal of Official Statistics*, 13(3): 279-303.
- Becker, G. S. and Lewis, H. G. (1974) Interaction between quantity and quality of children, *Economics of the Family*, 81-90.
- Booth, H. (1984) Transforming Gompertz's function for fertility analysis: The development of a standard for the relational Gompertz function, *Population Studies*, 38(3): 495-506.
- Brass, W. (1974) Perspectives in population prediction: Illustrated by the statistics of England and Wales, *Journal of the Royal Statistical Society, A*, 137(4): 532-583.

- Brown, R. L. (1991) *Introduction to the Mathematics of Demography*, ACTEX Publications, Inc.
- Hoem, J. M., Madsen, D., Nielsen, J. L., Ohlsen, E. M., Hansen, H. O., and Rennermalm, B. (1981) Experiment in modeling recent Danish fertility curves, *Demography*, 18(2): 231-244.
- Lee, R. D. (2000) The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications, *North American Actuarial Journal*, 4(1): 80-93.
- Lee, R. D. and Carter, L. R. (1992) Modeling and forecasting U.S. mortality, *Journal of the American Statistical Association*, 87(419): 659-675.
- Lewis, E. B. (1982) Control of body segment differentiation in *Drosophila* by the bithorax gene complex, *Embryonic Development, Part A: Genetics Aspects*, Edited by Burger, M. M. and R. Weber. Alan R. Liss, New York, 269-288.
- Martin, M. P. D. (1967) Une application des fonctions de Gompertz a l'etude de la fecondite d'une cohorte, *Population*, 22: 1085-1096.
- Murphy, E. M. and Nagnur, D. N. (1972) A Gompertz fit that fits: applications to Canadian fertility patterns, *Demography*, 9(1): 35-50.
- Neupert, R. F. (1992) Population projections for Mongolia: 1989-2019, *Asia-Pacific Population Journal*, 7(4): 61-80.
- Pritchett, L. (1994) Desired Fertility and the Impact of Population Policies, *Population and Development Review*, 20(1): 1-55.
- Tsai, Y. M. and Yi, C.C. (1987) Persistence and changes in Chinese family values, 張荳雲、呂玉瑕、王甫昌主編，九〇年代的台灣社會（下），中央研究院社會學研究所，123-170.
- Wilmoth, J. R. (1993) Computational methods for fitting and extrapolation the Lee-Carter model of mortality change, *National Institute on Aging*, 1: 1-19.
- Wilmoth, J. R. (1996) Mortality projections for Japan: a comparison of four methods, *Health and Mortality Among Elderly Populations*, 266-287.
- Wunsch, G. (1966) Courbes de Gompertz et perspectives de fecondite, *Recherches*

Economiques de Louvain, 32: 457-468.

Yue, J. C., Hu Y. W. and Chang, C. P. (2001) A ratio method for old mortality projection based on incomplete data: the case in Taiwan, *Journal of Population Studies*, 22: 1-18.

附 錄

表 1 1951 年到 1995 年 Gamma 函數的參數估計

年期	$\alpha - 1$	β	R2	年期	$\alpha - 1$	β	R2
1951	15.33	0.539	0.973	1974	21.94	0.850	0.990
1952	16.83	0.588	0.977	1975	22.36	0.880	0.991
1953	17.57	0.612	0.978	1976	23.52	0.927	0.992
1954	17.64	0.616	0.979	1977	23.75	0.945	0.992
1955	17.70	0.621	0.979	1978	24.15	0.963	0.993
1956	17.92	0.629	0.977	1979	24.73	0.989	0.994
1957	19.08	0.673	0.974	1980	23.86	0.957	0.993
1958	20.01	0.708	0.972	1981	24.66	0.989	0.993
1959	19.52	0.694	0.973	1982	25.49	1.021	0.994
1960	19.40	0.696	0.975	1983	26.28	1.049	0.996
1961	20.27	0.730	0.976	1984	27.53	1.094	0.997
1962	20.29	0.734	0.977	1985	28.30	1.120	0.998
1963	20.67	0.745	0.982	1986	27.78	1.096	0.997
1964	21.33	0.772	0.981	1987	29.92	1.176	0.999
1965	21.70	0.794	0.982	1988	30.66	1.201	0.999
1966	21.18	0.783	0.983	1989	30.66	1.198	0.999
1967	21.21	0.795	0.986	1990	31.00	1.209	0.999
1968	21.20	0.797	0.987	1991	31.46	1.225	0.997
1969	20.78	0.784	0.988	1992	31.83	1.237	0.996
1970	21.40	0.812	0.991	1993	31.87	1.237	0.995
1971	21.63	0.822	0.991	1994	32.54	1.261	0.993
1972	21.88	0.839	0.991	1995	32.10	1.240	0.994
1973	22.46	0.865	0.990				

表 2 1951 年到 1995 年 Gompertz 函數的參數估計

年期	a	b	R^2	年期	a	b	R^2
1951	-4.415	0.183	0.971	1974	-5.923	0.272	0.990
1952	-4.589	0.189	0.973	1975	-6.131	0.285	0.986
1953	-4.672	0.192	0.973	1976	-6.385	0.297	0.985
1954	-4.695	0.194	0.973	1977	-6.511	0.305	0.982
1955	-4.726	0.196	0.972	1978	-6.633	0.311	0.986
1956	-4.781	0.198	0.968	1979	-6.795	0.320	0.986
1957	-4.964	0.206	0.965	1980	-6.656	0.314	0.991
1958	-5.120	0.213	0.960	1981	-6.841	0.322	0.991
1959	-5.060	0.212	0.963	1982	-6.992	0.329	0.988
1960	-5.077	0.214	0.963	1983	-7.121	0.334	0.987
1961	-5.219	0.221	0.963	1984	-7.340	0.343	0.985
1962	-5.233	0.223	0.965	1985	-7.454	0.346	0.984
1963	-5.254	0.224	0.971	1986	-7.304	0.338	0.982
1964	-5.346	0.230	0.974	1987	-7.723	0.356	0.979
1965	-5.445	0.237	0.978	1988	-7.850	0.360	0.979
1966	-5.424	0.239	0.980	1989	-7.811	0.356	0.971
1967	-5.521	0.246	0.982	1990	-7.883	0.359	0.972
1968	-5.547	0.248	0.985	1991	-7.957	0.360	0.964
1969	-5.502	0.247	0.988	1992	-8.021	0.362	0.961
1970	-5.660	0.255	0.987	1993	-8.019	0.361	0.959
1971	-5.715	0.258	0.990	1994	-8.130	0.365	0.954
1972	-5.837	0.266	0.991	1995	-8.013	0.359	0.956
1973	-5.973	0.273	0.989				

表 3 Lee-Carter 模型的參數 a_x 、 b_x

年齡組	SVD		SVD 近似法		WLS+SVD		WLS+SVD 近似法	
	a_x	b_x	a_x	b_x	a_x	b_x	a_x	b_x
15-19 歲	3.461	0.095	3.461	0.060	3.453	0.132	3.476	0.062
20-24 歲	5.222	0.103	5.222	0.057	5.213	0.128	5.229	0.060
25-29 歲	5.469	0.110	5.469	0.052	5.466	0.116	5.467	0.054
30-34 歲	4.811	0.226	4.811	0.097	4.853	0.198	4.831	0.091
35-39 歲	3.826	0.374	3.826	0.172	3.872	0.350	3.864	0.160
40-44 歲	2.562	0.508	2.562	0.246	2.557	0.525	2.571	0.242
45-49 歲	0.468	0.645	0.468	0.318	0.434	0.692	0.464	0.319

表 4 個別估計法參數配適之迴歸線及時間序列模型

年齡組	迴歸線	R ²	時間序列模型
15-19 歲	5.2823-0.0294t	87.5%	(1-B)(1-0.5088B) $\varepsilon_t = a_t$ ARIMA(1,1,0)
20-24 歲	6.9467-0.0278t	86.3%	(1-0.9752B) $\varepsilon_t = a_t$ or $\varepsilon_t = \phi \varepsilon_{t-1} + a_t$ AR(1)
25-29 歲	6.9844-0.0244t	92.5%	(1-B)(1-(-0.3952)B) $\varepsilon_t = a_t$ ARIMA(1,1,0)
30-34 歲	7.575-0.04458t	87.8%	(1-B)(1-0.52B ²) $\varepsilon_t = a_t$ ARI((1) ₂ ,1)
35-39 歲	8.7759-0.0798t	90.3%	(1-B)(1-B ²) (1-(-0.6)B) $\varepsilon_t = a_t$ ARIMA(1,2,0)
40-44 歲	9.7574-0.1161t	95.5%	(1-B)(1-0.99B) $\varepsilon_t = (1-0.715B)a_t$ ARIMA(1,1,1)
45-49 歲	9.8884-0.1519t	98.3%	(1-0.9375B) $\varepsilon_t = a_t$ AR(1)

註：B 為倒退元(Back shift operator)， a_t 為白干擾

表 5 各模型總生育率的誤差結果比較

	Gamma	Gompertz	Lee-Carter	個別估計法	主成份分析
MAPE	11.03	9.54	5.71	5.85	18.31
RMSPE	13.51	11.44	7.38	8.09	19.23

表 6 各模型在各年齡組的誤差比較（五個年度加總）

模式	準則	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
Gamma	MAPE	17.38	37.48	16.596	9.17	19.19	18.88	33.15
	RMSPE	18.09	36.66	19.17	9.93	19.60	19.46	36.26
Gompertz	MAPE	14.22	8.65	9.30	11.11	11.62	12.31	13.40
	RMSPE	16.78	11.41	10.70	12.58	13.47	14.39	15.36
Lee-Carter (SVD+WLS)	MAPE	25.61	45.99	8.78	33.85	49.84	48.37	37.18
	RMSPE	27.01	47.3	12.39	34.35	50.19	49.19	38.79
個別估計	MAPE	8.47	9.95	6.32	7.63	10.78	4.12	47.35
	RMSPE	10.39	12.89	9.04	8.82	13.68	4.86	49.13

註：網底字為該年齡組中誤差最小者

表 7 各模型在不同年度下的誤差結果比較（所有年齡加總）

	Gamma		Gompertz		Lee-Carter (SVD+WLS)		個別估計	
	MAPE	RMSPE	MAPE	RMSPE	MAPE	RMSPE	MAPE	RMSPE
1996	16.51	17.87	7.31	8.58	27.10	29.95	6.27	13.03
1997	20.07	22.24	15.77	17.23	30.08	33.49	8.15	14.03
1998	26.06	31.14	3.65	3.94	38.34	40.33	17.67	21.19
1999	23.73	28.37	10.18	10.88	40.92	43.33	18.26	24.34
2000	22.09	23.03	20.68	20.76	41.85	46.39	17.22	27.86

註：網底字為當年度誤差最小者